Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **2 heures**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôles qualité et étude de la farine d'une minoterie (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa

Après l'arrêt du chauffage, l'eau du spa, initialement à 38 °C, refroidit dans un environnement à 25 °C. L'exercice modélise cette évolution par une équation différentielle et étudie la température, sa limite et le déclenchement d'une alarme.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 0 sur l'intervalle [0 ; +∞[.

L'équation homogène s'écrit $y' = -0,05y$. Sa solution générale sur $[0;+[$ est une exponentielle de la forme $y(t) = Ce^{-0,05t}$, où C est une constante réelle. On peut vérifier le résultat en dérivant : $y'(t) = -0,05Ce^{-0,05t}$, donc $y'(t) + 0,05y(t) = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

On cherche une solution constante sous la forme $y(t) = k$. Alors $y'(t) = 0$, et l'équation devient $0,05k = 1,25$. Ainsi, $k = 1,25/0,05 = 25$. La fonction constante égale à 25 vérifie donc l'équation différentielle (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante de (E) est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 1,25.

La différence de deux solutions de (E) est solution de l'équation homogène associée. On obtient donc les solutions de (E) en ajoutant la solution particulière constante 25 aux solutions trouvées à la question 1. La solution générale est ainsi définie pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions de (E) sont $y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

D'après la question précédente, $f(t) = Ce^{-0,05t} + 25$. La condition initiale impose $f(0) = C + 25 = 38$, car $e^0 = 1$. Donc $C = 38 - 25 = 13$, ce qui établit l'expression demandée pour tout $t \in [0;+[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondir le résultat au dixième et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On substitue 24 heures dans l'expression de la température : $f(24) = 13e^{-0,05\times 24} + 25 = 13e^{-1,2} + 25 \approx 28,9155$. Arrondie au dixième, cette température vaut 28,9 °C. Elle représente la température de l'eau après 24 heures sans chauffage.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 24 h sans chauffage, la température de l'eau est d'environ 28,9 °C.

Question 2. a). Pour tout réel t de [0 ; +∞[, déterminer une expression de f'(t).

La dérivée de l'exponentielle composée $e^{-0,05t}$ est $-0,05e^{-0,05t}$. La dérivée de la constante 25 est nulle. Par conséquent, pour tout $t \geq 0$, on obtient $f'(t) = 13 \times (-0,05)e^{-0,05t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis expliquer si ce sens de variation est cohérent avec le contexte.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,05t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -0,65e^{-0,05t} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0;+[$. Ce résultat est cohérent avec la situation : après l'arrêt du chauffage, l'eau du spa refroidit.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction f est strictement décroissante sur $[0;+[$, ce qui correspond au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,05t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Dans $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, le premier terme tend donc vers 0 et le terme constant reste égal à 25.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +} f(t) = 25.$

Question 3. b). Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de cette limite.

La limite de 25 °C signifie que la température de l'eau se rapproche de 25 °C au fil du temps. Elle ne descend pas sous cette valeur dans le modèle : cette limite est précisément la température ambiante, supposée constante pendant l'expérience.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, l'eau se rapproche de 25 °C, température ambiante constante.

Question 4. a). L'alarme se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Si l'utilisateur programme 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé depuis la coupure avant que l'alarme retentisse. Donner la valeur exacte puis l'arrondir à la minute.

Le seuil est atteint lorsque $f(t) = 36$: $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$, puis $t = 20\ln(13/11)$ heures. Cela vaut environ 200,465 minutes, soit 200 minutes à la minute près. L'alarme retentit juste après le franchissement strict du seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Seuil atteint après $20\ln(13/11)$ h, soit 3 h 20 min à la minute près.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme fourni, qui actualise la température modélisée en augmentant le temps d'une heure à chaque étape.

À chaque passage dans la boucle, H augmente d'une heure et la température est recalculée. À $H = 7$, $f(7) \approx 34,161 > 34$, donc la boucle continue. À $H = 8$, $f(8) \approx 33,714 < 34$, donc elle s'arrête et affiche la valeur de H.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme affiche 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme augmente le temps heure par heure jusqu'à ce que la température calculée devienne strictement inférieure à 34 °C. Il détermine donc le premier nombre entier d'heures après la coupure auquel l'eau passe sous ce seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Il donne le premier nombre entier d’heures où l’eau passe sous 34 °C : 8 h.

2. Contrôles qualité et étude de la farine d'une minoterie

Une minoterie contrôle l'extensibilité d'échantillons de pâte et le taux d'humidité de livraisons de blé mélangées. L'exercice étudie aussi le poids des sacs de farine et les probabilités liées aux clients qui acceptent de tester une nouvelle farine, La Romaine.

Partie A

Question 1. a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

Les cinq mesures lues dans le tableau sont 104, 81, 83, 57 et 55 mm. La moyenne vaut $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. L'écart-type de la série est la racine de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne : $\sigma = \sqrt{((104-76)^2 + (81-76)^2 + (83-76)^2 + (57-76)^2 + (55-76)^2)/5} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type arrondi au centième : 18,22 mm.

Question 1. b). En considérant que l'écart-type de la série est de 18 mm, vérifier qu'aucune des cinq valeurs n'est en dehors de l'intervalle [moyenne − 2σ ; moyenne + 2σ], puis conclure si un test sur cinq nouveaux échantillons est nécessaire.

La moyenne trouvée est 76 mm et l'écart-type imposé pour cette question est 18 mm. Les bornes de l'intervalle de contrôle sont $76 - 2 \times 18 = 40$ mm et $76 + 2 \times 18 = 112$ mm. Les cinq valeurs du tableau, de 55 à 104 mm, sont comprises entre ces bornes. Aucune mesure n'est donc en dehors de l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucune mesure ne déclenche le contrôle : le technicien n'a pas à tester cinq nouveaux échantillons.

Question 2. À partir des masses et des taux d'humidité des deux camions, montrer que le technicien peut autoriser le déchargement du blé dans un même silo, sachant que le taux d'humidité du mélange doit être inférieur à 13 %.

Le taux d'humidité du mélange se calcule en pondérant les taux par les masses de blé. On obtient $\dfrac{29\,540 \times 12,4 + 14\,540 \times 14,1}{29\,540 + 14\,540} \approx 12,96$ %. Ce taux est inférieur à la limite exigée de 13 %. Le mélange des deux livraisons respecte donc le cahier des charges.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le taux d'humidité du mélange est d'environ 12,96 %, inférieur à 13 % : le déchargement est autorisé.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit la variable X, de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Pour la valeur 25 kg, le score réduit est $z = (25 - 25,2)/0,1 = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2)$, où Z suit la loi normale centrée réduite. La table de cette loi donne environ 0,0228, soit 0,023 à 10^{-3} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un sac pèse moins de 25 kg est d'environ 0,023, à 10^{-3} près.

Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à 10^{-2} près.

Pour une loi normale, l'intervalle central contenant environ 95 % des valeurs s'écrit approximativement $[\mu - 1,96\sigma \ ; \ \mu + 1,96\sigma]$. Ici, $\mu = 25,2$ et $\sigma = 0,1$, donc le demi-écart recherché est $h = 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg. Arrondi au centième, cela donne 0,20 kg.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Un choix convenable est $h = 0,20$ kg, à 10^{-2} près.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi la courbe ne peut pas représenter la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La loi normale donnée a un écart-type de 0,1 kg : à 0,4 kg de la moyenne, la densité ne vaut que e^{-8}, soit environ 0,00034 fois son maximum. Or le graphique montre une courbe encore nettement élevée à une telle distance de 25,2 kg, notamment autour de 24,8 kg. Sa dispersion est donc beaucoup trop grande pour représenter la densité de cette loi.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée : elle ne correspond pas à une loi normale d'écart-type 0,1 kg.

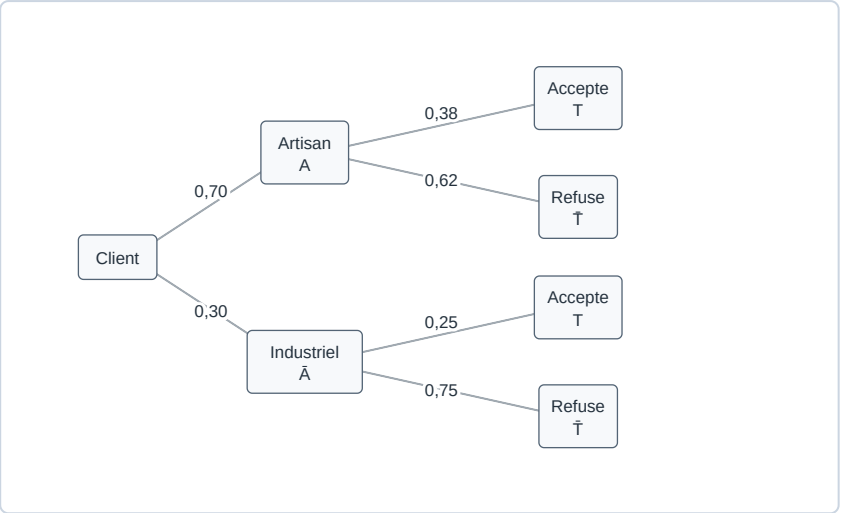
Partie C

Question 1. Représenter la situation décrite par un arbre pondéré, en distinguant les artisans boulangers et les boulangers industriels, puis l'acceptation ou le refus du test de la farine La Romaine.

Les données du sujet donnent $P(A) = 0,70$, donc $P(\overline{A}) = 0,30$. Parmi les artisans, 38 % acceptent, donc 62 % refusent. Parmi les boulangers industriels, 25 % acceptent et 75 % refusent. Sur l'arbre, les probabilités inscrites après chaque type de boulanger sont conditionnelles et les deux branches issues de chaque catégorie totalisent

1.

Arbre pondéré des clients et de leur réponse



Les probabilités des deux branches issues de chaque catégorie totalisent 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : 70 % artisans, 30 % industriels ; acceptation : 38 % et 25 %, respectivement.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

L'événement demandé correspond au chemin de l'arbre « artisan boulanger, puis accepte le test ». La probabilité de ce chemin est le produit de la probabilité d'être artisan et de la probabilité conditionnelle d'accepter parmi les artisans : $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,70 \times 0,38$. Ce produit donne la probabilité recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un client soit artisan et accepte le test vaut $P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Un client qui accepte est soit artisan, soit boulanger industriel. Ces deux événements sont incompatibles ; on additionne donc les probabilités des deux chemins menant à l'acceptation. Le premier chemin vaut $0,70 \times 0,38$, et le second $0,30 \times 0,25$. Ainsi, $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,341$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un client accepte de tester La Romaine est $0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'il soit un artisan boulanger.

On cherche la probabilité qu'un client soit artisan sachant qu'il a accepté le test. Par la formule de probabilité conditionnelle, $P_T(A) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)}$. Les probabilités obtenues aux questions précédentes donnent $P_T(A) = \dfrac{0,266}{0,341} \approx 0,7801$. L'arrondi au millième est donc 0,780.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les clients ayant accepté le test, la probabilité d'être artisan est $0,780$, à 10^{-3} près.

Question 4. a). Pour un échantillon de 200 clients, calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'au plus 60 clients aient testé la farine La Romaine, sachant que Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341.

Avec $Y \sim \mathcal{B}(200 ; 0,341)$, la probabilité demandée est la somme des probabilités binomiales de 0 à 60 : $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$. Cette probabilité cumulée vaut environ 0,125 ; arrondie au millième, elle reste 0,125.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'au plus 60 clients aient testé la farine est $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y, qui compte les clients ayant testé la farine La Romaine dans un échantillon de 200 clients, puis interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(Y) = np$. Ici, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Sur un grand nombre d'échantillons de 200 clients, le nombre moyen de clients ayant testé la farine La Romaine sera donc de 68,2 par échantillon.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ clients : c'est le nombre moyen de clients ayant testé la farine dans un échantillon de 200.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRD1 et dure 2 heures. Elle comprend deux exercices de 10 points chacun, sans coefficient indiqué. Les contextes sont le refroidissement d'un spa et les contrôles d'une minoterie. Les compétences mobilisées incluent équations différentielles, statistiques, lois normale et binomiale, probabilités et interprétation des résultats.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière.
- Le modèle du spa f(t) = 13e^(-0,05t) + 25 tend vers la température ambiante de 25 °C.
- Le taux d'humidité d'un mélange se calcule par une moyenne pondérée par les masses des lots.
- Pour une variable Y suivant la loi binomiale B(n, p), son espérance est E(Y) = np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Garder les unités et relier les résultats numériques au contexte professionnel.
- Respecter l'arrondi demandé dans chaque question : au dixième, au centième ou à 10^{-3} près.
- Pour le blé mélangé, pondérer les taux d'humidité par les masses correspondantes.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier l'événement conditionnant et utiliser le bon dénominateur.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de refroidissement ?

Résoudre d'abord l'équation homogène y' + 0,05y = 0, puis chercher une solution particulière constante pour le second membre 1,25. Combiner les solutions et utiliser la condition initiale f(0) = 38.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du mélange des deux livraisons ?

Multiplier la masse de blé de chaque camion par son taux d'humidité pour obtenir la masse d'eau correspondante. Additionner ces masses d'eau, diviser par la masse totale de blé et comparer le taux obtenu à 13 %.

Q : Comment traiter le calcul du nombre de clients ayant testé la farine ?

Utiliser la loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Pour « au plus 60 », calculer la probabilité cumulée P(Y ≤ 60), puis arrondir le résultat à 10^{-3}.

Q : Quelles précautions prendre pour répondre selon les attentes de l'épreuve ?

Présenter une démarche lisible, choisir le modèle adapté et formuler une conclusion liée à la situation. Respecter les arrondis demandés et indiquer les unités des grandeurs physiques.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Processus de Réalisation de Produits : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.