Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

# Mathématiques

**Session 2023** • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

**1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) **Page 3**

**2. Série de Fourier d’une fonction paire périodique** (10 questions) **Page 7**

**3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

**Sujet officiel (PDF) :** https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

# 1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée par f(t), en centimètres, au cours de la fermeture. L’exercice étudie le mouvement à l’aide d’une équation différentielle, puis les variations, le temps de fermeture et la position moyenne.

## Partie A

**Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

On cherche les racines du polynôme caractéristique. On peut factoriser directement : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$ , car les constantes 1 et 4 ont pour somme 5 et pour produit 4. Le produit est nul si l’un de ses facteurs est nul. Les deux équations obtenues sont donc $r + 1 = 0$ et $r + 4 = 0$, ce qui fournit les deux racines réelles distinctes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions de l’équation caractéristique sont $r = -1$ et $r = -4$.

**Question 1.b. À l’aide du tableau fourni et des racines obtenues, résoudre l’équation différentielle y″ + 5y′ + 4y = 0.**

L’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Le tableau fourni indique alors que la solution générale de l’équation différentielle est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines. On remplace donc $r_1$ et $r_2$ dans les termes $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$. Les constantes de combinaison sont arbitraires et réelles.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

**Question 2.a. À partir de la position initiale de M à 20 cm de O et de sa vitesse initiale de −10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f′(0).**

La fonction $f$ représente la distance $OM$, exprimée en centimètres. À l’instant initial, le point M est situé à 20 cm de O : cette distance donne directement $f(0) = 20$. La dérivée de la distance par rapport au temps est la vitesse du point M selon l’axe du mouvement. Comme le tiroir se rapproche de O et que sa vitesse initiale est négative, la valeur donnée s’écrit directement pour $f'(0)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20\ \text{cm}$ et $f'(0) = -10\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

**Question 2.b. En utilisant l'expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

La distance après deux secondes se calcule en évaluant la fonction admise en $t = 2$. On remplace donc $t$ par 2 dans chacun des deux termes, sans arrondir les exponentielles pour conserver une valeur exacte : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. La valeur approchée en centimètres donne un contrôle numérique de cette distance et reste supérieure au seuil de fermeture de 0,5 cm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après 2 s, $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}1567$ cm.

**Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

On évalue la distance à 4 secondes avec l'expression de $f$ : $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}4274$ cm, donc elle est inférieure à 0,5 cm. De plus, $f$ est continue et $f(0) = 20 > 0{,}5$. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit donc qu'il existe un instant strictement compris entre 0 et 4 secondes où la distance atteint 0,5 cm. Le tiroir est ensuite fermé avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui. À 4 s, $f(4) \approx 0{,}4274 < 0{,}5$ cm : le seuil est franchi avant 4 s.

## Partie B

**Question 1.a. En utilisant la limite rappelée pour l'exponentielle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction étudiée est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent tous deux vers $-\infty$. D'après la limite rappelée dans l'énoncé, chaque exponentielle tend alors vers 0. Les coefficients étant constants, chacun des deux termes de $f(t)$ tend vers 0, et leur différence tend également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

**Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$ est finie et vaut 0. Par définition, si une fonction tend vers une limite réelle $L$ en $+\infty$, sa courbe possède une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, $L = 0$. L'asymptote est donc l'axe des abscisses, que la courbe approche lorsque le temps devient grand.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

**Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive terme à terme la fonction $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Pour une exponentielle composée, $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, $(e^{-t})' = -e^{-t}$, tandis que $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. Le second terme de $f$ porte déjà un signe négatif, donc sa dérivée devient positive. On obtient l'expression suivante pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

**Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

| $t$ | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|
| **Signe de** $f'(t)$ | $-$ | |
| **Variation de** $f$ | 20 | $\searrow$ 0 |

Comme $f'(t) < 0$ sur l'intervalle, $f$ y est strictement décroissante. À gauche, $f(0) = 20$, et à droite, la limite de $f(t)$ est 0. Ces deux valeurs et le signe de la dérivée déterminent le tableau de variations.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0; +\infty[$, $f$ décroît strictement de 20 vers 0.

**Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en calculant les valeurs demandées et en évaluant la condition jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.**

Le tableau demande les valeurs de $f(t)$ arrondies au centième. Il faut ensuite tester la condition avec la valeur exacte de $f(t)$ : elle reste vraie à 3,8 s, puis devient fausse à 3,9 s. La ligne 39 doit donc être ajoutée, car c'est elle qui montre l'arrêt de la boucle.

| **Ligne** | $t$ | $f(t)$**, arrondie au centième** | **Condition** $f(t) > 0{,}5$ |
|---|---|---|---|
| 36 | 3,6 | 0,64 | VRAIE |
| 37 | 3,7 | 0,58 | VRAIE |
| 38 | 3,8 | 0,52 | VRAIE |
| 39 | 3,9 | 0,47 | FAUSSE |

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le tableau se complète jusqu'à la ligne 39, où la condition devient fausse.

**Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.**

L'algorithme augmente $t$ de 0,1 s tant que la distance reste strictement supérieure à 0,5 cm. À 3,8 s, la distance vaut environ 0,52 cm : la boucle continue. À 3,9 s, elle vaut environ 0,47 cm : la condition devient fausse et l'exécution s'arrête. La valeur retournée est donc le premier dixième de seconde pour lequel le critère de fermeture est vérifié.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s à l'arrêt : le tiroir est alors fermé selon le critère donné.

**Question 4. À partir de la définition de la position moyenne m sur l'intervalle [0 ; 4], démontrer l'expression exacte de m donnée dans le sujet.**

Par définition, $m = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt$. Une primitive de $f$ est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$, puisque sa dérivée redonne les deux termes de $f$. On applique ensuite le théorème fondamental : $m = \frac{1}{4}(F(4) - F(0))$. Les termes constants donnent $\frac{1}{4}(\frac{70}{3} - \frac{5}{6}) = \frac{45}{8}$; les termes exponentiels fournissent les deux autres termes ci-dessous.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5{,}5182 \text{ cm}.$$

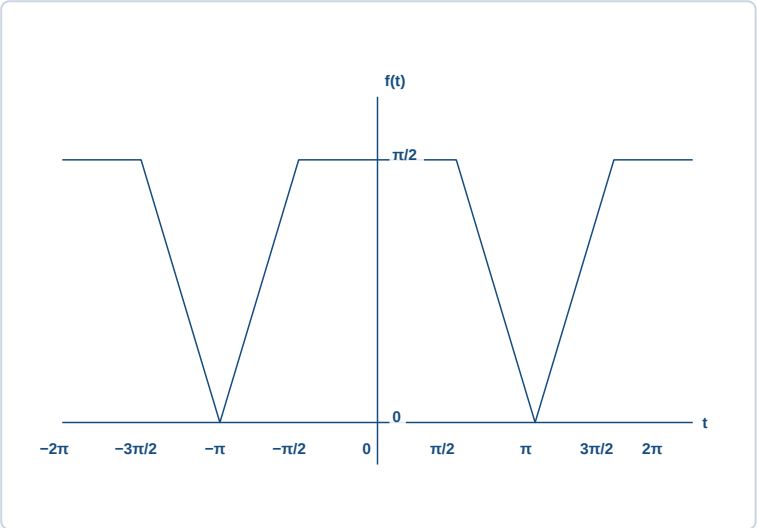
## 2. Série de Fourier d’une fonction paire périodique

On étudie une fonction paire de période 2π définie par morceaux sur [0 ; π]. Les questions portent sur son graphique, ses coefficients de Fourier et une somme partielle, puis sur l’approximation de la valeur efficace à partir des trois premiers coefficients.

**Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition et de sa périodicité.**

Sur $[0, \pi/2[$, le graphe est horizontal à la hauteur $\pi/2$, puis il suit la droite $f(t) = \pi - t$ jusqu’à $f(\pi) = 0$. La parité reproduit ce profil de l’autre côté de zéro. La période $2\pi$ répète ensuite le motif : maxima $\pi/2$ aux multiples pairs de $\pi$, minima nuls aux multiples impairs.

**Représentation de f sur [-2π, 2π]**




**✓ RÉPONSE À RETENIR**

Graphe pair et périodique de période $2\pi$, avec maxima $\pi/2$ aux multiples de $2\pi$ et minima nuls aux multiples impairs de $\pi$.

**Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier $b_n$ est nul.**

La formule du sujet donne $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$. Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$. La fonction $f$ est paire et $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire ; leur produit est donc impair. Son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle. Comme le produit est périodique de période $2\pi$, son intégrale sur toute période est également nulle.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

Pour tout entier $n \geq 1$, le coefficient de Fourier associé au sinus s’annule : $b_n = 0$.

**Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

Le formulaire indique que la pulsation et la période vérifient $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. La période donnée dans l'énoncé est $T = 2\pi$. En substituant cette valeur, on obtient $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation associée à la fonction est donc d'un radian par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La pulsation de la fonction est $\omega = 1$ radian par unité de temps.

**Question 4. Démontrer que le coefficient $a_0$ vaut $3\pi/8$.**

Pour $T = 2\pi$, la formule du formulaire donne $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. La parité permet d'écrire $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. En séparant les deux morceaux : $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{3\pi^2}{8}$. La division par $\pi$ donne le résultat demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le coefficient constant vaut exactement $a_0 = \dfrac{3\pi}{8}$.

**Question 5. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'expression de $a_n$ sous forme d'intégrales donnée dans le sujet.**

Comme $f$ est paire, le formulaire donne $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$, puisque $T = 2\pi$ et $\omega = 1$. On partage l'intégrale en $[0, \pi/2]$ et $[\pi/2, \pi]$. Sur ces intervalles, respectivement, $f(t) = \pi/2$ et $f(t) = \pi - t$. En remplaçant et en simplifiant le premier terme, on obtient l'expression intégrale du sujet.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $n \geq 1$, $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

**Question 6. En utilisant l'expression admise de $a_n$, déterminer les valeurs exactes de $a_1$, $a_2$ et $a_3$.**

On applique l'expression admise $a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$, les cosinus valent $0$ et $-1$, donc $a_1 = 2/\pi$. Pour $n = 2$, ils valent $-1$ et $1$, donc $a_2 = -1/\pi$. Pour $n = 3$, ils valent $0$ et $-1$, donc $a_3 = 2/(9\pi)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les coefficients exacts sont $a_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $a_2 = -\dfrac{1}{\pi}$ et $a_3 = \dfrac{2}{9\pi}$.

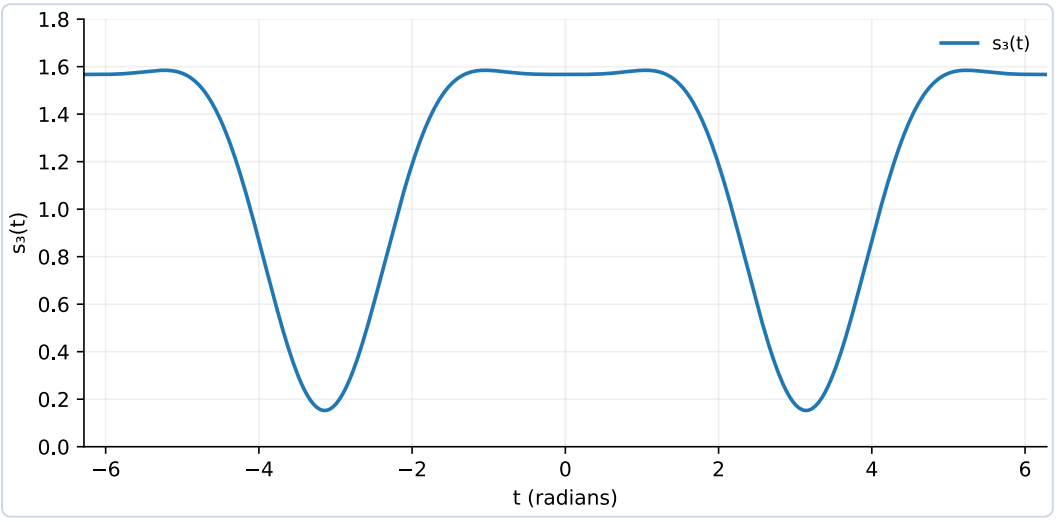
**Question 7. Déduire des coefficients précédents l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ indiquée dans le sujet.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. D'après la question 2, tous les coefficients $b_n$ sont nuls. On insère ensuite les valeurs exactes de $a_0, a_1, a_2, a_3$. Le coefficient $a_2 = -1/\pi$ donne le signe négatif devant $\cos(2t)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

**Question 8. Parmi les trois courbes proposées, indiquer sans justification celle qui représente la fonction $s_3$.**

La somme partielle $s_3$ est une combinaison de cosinus, donc elle est paire, périodique de période $2\pi$ et régulière. Son profil présente des maxima arrondis près des multiples de $2\pi$ et des creux arrondis près des multiples impairs de $\pi$. Parmi les dessins proposés, ce profil correspond à la courbe numéro 3.




La forme calculée correspond à la courbe numéro 3 du sujet.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les trois courbes proposées, la fonction $s_3$ est représentée par la courbe numéro 3.

**Question 9.a. Calculer une valeur approchée de $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, arrondie à $10^{-4}$.**

En remplaçant les coefficients par leurs valeurs exactes, $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right]$. Après réduction, $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$, soit environ $1{,}64371784$. L'arrondi au dix-millième est donc $1{,}6437$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arrondie au dix-millième, la valeur demandée est $P \approx 1{,}6437$.

**Question 9.b. Sachant que F² = π²/6 et que P approche F², choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

L'erreur relative est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}64371784$ et $F^2 = \pi^2/6 \approx 1{,}64493407$, elle vaut environ $0{,}07394\,\%$. La réponse la plus proche parmi les trois choix proposés est donc $0{,}1\,\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le pourcentage d'erreur à choisir parmi les propositions est $0{,}1\,\%$.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

**Bilan de l'épreuve :** L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et l'analyse de Fourier d'une fonction périodique, avec calculs, interprétations et approximation.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$ ; ses racines déterminent la forme générale des solutions.
- La position moyenne sur [0 ; 4] est $m = 1/4 \int_0^4 f(t)dt$.
- Pour une fonction paire, $b_n = 0$ et $a_n = 4/T \int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour $n \geq 1$.
- La période et la pulsation vérifient $\omega = 2\pi/T$ ; la somme partielle $s_n$ conserve les coefficients jusqu'au rang n.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser les conditions initiales de position et de vitesse pour déterminer les constantes de la solution différentielle.
- Distinguer les unités : distance en centimètres, vitesse en $cm \cdot s^{-1}$ et temps en secondes.
- Dans l'algorithme, vérifier la condition avant chaque incrément et s'arrêter dès qu'elle devient fausse.
- Pour Fourier, exploiter la parité et la périodicité, puis arrondir P à $10^{-4}$ comme demandé.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?**

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la solution générale de l'équation différentielle. Les valeurs de f(0) et f'(0) servent ensuite à déterminer les constantes.

**Q : Pourquoi les coefficients $b_n$ de la série de Fourier sont-ils nuls ?**

La fonction étudiée est paire, tandis que le sinus est impair. Le produit de ces deux fonctions est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle, ce qui donne $b_n = 0$.

**Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?**

Les deux exercices valent chacun 10 points, et les deux parties de l'exercice 1 peuvent être traitées indépendamment. Avancez régulièrement et gardez du temps pour l'algorithme, les calculs exacts et les interprétations demandées.

**Q : Quelles consignes de présentation et de notation faut-il respecter ?**

Justifiez les démonstrations, donnez des valeurs exactes lorsqu'elles sont demandées et arrondissez P à $10^{-4}$. À la question à choix multiples, une seule réponse doit être recopiée et aucune justification n'est demandée.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
**Ressources BTS Conception des Processus de Réalisation de Produits :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.