Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement D1

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, le nombre de personnes équipées d'un implant médical est étudié à partir de données annuelles de 2013 à 2021. Deux modèles sont examinés : un ajustement exponentiel et un modèle issu d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau fourni en annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

On calcule pour chaque valeur $y = \ln(N - 30)$, avec N exprimé en milliers, puis on arrondit au millième. Le tableau ci-dessous reprend les rangs et les valeurs de l'énoncé.

Année	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**
Rang k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = \ln(N - 30)$	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

$3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.$

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$ donne une pente d'environ $0,07943$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3,2606$. En arrondissant chacun des coefficients au centième, on obtient l'équation de la droite d'ajustement demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0,08k + 3,26.$

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées de l'implant, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

Comme $y = \ln(N - 30)$, l'équation ajustée implique $\ln(N - 30) = 0,08k + 3,26$. En exponentiant, on obtient $N = 30 + e^{3,26}e^{0,08k}$. Or $e^{3,26} \approx 26,05$, d'où le modèle demandé, avec N exprimé en milliers.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers.

Question 3.a. En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.

Le rang correspondant à 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. En appliquant le modèle, $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,701$ milliers de personnes. L'arrondi au millier près donne donc 104 000 personnes équipées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

104 000 personnes.

Question 3.b. Si le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, le modèle étudié reste-t-il valide à long terme ? Justifier la réponse.

Non. Lorsque $k \to +\infty$, $e^{0,08k} \to +\infty$, donc le modèle prévoit que $N(k) \to +\infty$. Il finirait ainsi par prévoir un nombre de personnes équipées supérieur aux 60 millions d'habitants du pays, ce qui est impossible si la population reste stable.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le modèle tend vers l'infini et dépasserait la population stable de 60 millions.

Partie B

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,05y = 0.

L'équation homogène s'écrit $y' = -0,05y$. Sa solution générale sur [0;+[est une fonction exponentielle de constante multiplicative réelle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.

Si $y(t) = c$ est constante, alors $y' = 0$. En remplaçant dans (E), on trouve $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$. La fonction constante égale à 1 convient.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. Résoudre sur l'intervalle [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.

Une solution particulière de (E) est la constante $y = 1$. La solution générale s'obtient en lui ajoutant la solution générale de l'équation homogène (E_0), soit une exponentielle de constante multiplicative réelle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. Sachant que g(0) = 8, en déduire une expression de la fonction g sur l'intervalle [0 ; +∞[.

On applique la condition initiale à la solution générale : $g(0) = 1 + C = 8$. Ainsi, $C = 7$, ce qui détermine l'expression de g sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

Question 2. La fonction f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)) modélise le nombre de personnes équipées, en milliers, t années après 2013. Déterminer au millier près le nombre de personnes équipées en 2026 selon ce modèle.

En 2026, $t = 2026 - 2013 = 13$. Le modèle donne $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05 \times 13}} \approx 96,684$ milliers de personnes. Arrondi au millier près, le résultat est 97 000 personnes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

97 000 personnes.

Question 3. Déterminer la limite de la fonction f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0,05t} \to 0$. Le dénominateur de $f(t)$ tend donc vers 1, d'où $f(t) \to 450$. Comme f est exprimée en milliers, cette limite correspond à 450 000 personnes équipées selon le modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes.

Question 4. À partir de l'expression de f'(t) obtenue par logiciel de calcul formel, déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$. Son numérateur et son dénominateur sont positifs, donc $f'(t) > 0$. La fonction est strictement croissante : le modèle prévoit une augmentation continue du nombre de personnes équipées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

Résoudre $f(t) > 120$ donne $e^{-0{,}05t} < \dfrac{11}{28}$, donc $t > \dfrac{\ln(11/28)}{-0{,}05} \approx 18{,}69$. À $t = 18$, soit en 2031, le seuil n'est pas dépassé ; à $t = 19$, soit en 2032, il l'est. La première année entière correspondante est donc 2032.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À partir de 2032.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Une machine d'usine est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides, et l'on étudie ses défauts d'approvisionnement et ses pannes. Un laboratoire analyse ensuite le volume d'eau des bouteilles pour tester le réglage de la machine.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. À partir des événements indépendants A et B, de probabilités respectives 0,03 et 0,02, associer chacune des quatre phrases du tableau aux informations correspondantes. Écrire le numéro de chaque phrase avec la lettre associée ; aucune justification n'est demandée.

La phrase 1 désigne le complément de A, donc sa probabilité vaut 1 - P(A). La phrase 2 correspond à A sans B. Pour la phrase 3, l'indépendance donne la probabilité de l'intersection. Enfin, un défaut d'approvisionnement survient si A ou B se réalise : on calcule donc la probabilité de leur réunion.

Phrase	Information associée
1	E : 0,97
2	C : $A \cap \bar{B}$
3	F : 0,0006
4	D : 0,0494

✓ RÉPONSE À RETENIR

1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

Question 1. Sur une période de 200 jours, la probabilité quotidienne d'une panne est 0,025 et les pannes sont indépendantes. Donner sans justification la loi de probabilité de X, nombre de jours de panne, et préciser ses paramètres.

Chaque jour est une épreuve de Bernoulli, avec une panne comme succès et une probabilité de succès égale à 0,025. Les pannes étant indépendantes, le nombre X de jours de panne sur 200 jours suit une loi binomiale. Ses paramètres sont le nombre de jours observés et la probabilité quotidienne d'une panne.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0,025)$.

Question 2.a. La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

1. Pour approcher une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ par une loi de Poisson, on prend le paramètre $\lambda = np$.

2. Ici, avec 200 jours et une probabilité quotidienne de panne de 0,025 : $\lambda = 200 \times 0,025 = 5$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 5$.

Question 2.b. Pour une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.

Pour la loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités des valeurs de 0 à 10 :
$P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} e^{-5} \frac{5^k}{k!}$.
La calculatrice donne environ 0,9863047. L'arrondi au millième est donc 0,986.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0,986$.

Question 2.c. Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule fournie pour la loi de Poisson, dire si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.

La formule de la loi de Poisson donne, pour $k = 15$, $P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{15!}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc cette probabilité est strictement positive. Elle est seulement très faible, ce qui explique qu'elle ne soit pas visible sur le graphique.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. À partir du tableau des volumes mesurés et de leurs effectifs pour un échantillon de 100 bouteilles, déterminer à la calculatrice la moyenne et l'écart type de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.

La moyenne se calcule en pondérant chaque volume par son effectif. La variance est la moyenne pondérée des carrés des écarts à la moyenne.

Volume (cL)	Effectif
73	17
74	20
75	43
76	13
77	7

On obtient $\bar{x} = 74,73$ cL et une variance de 1,2171. Ainsi, l'écart type est $\sqrt{1,2171} \approx 1,10$ cL.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 74,73 cL ; écart type : 1,10 cL.

Question 2.a. Pour le test bilatéral H_0 : m = 75 contre H_1 : m ≠ 75, déterminer à 10^{-2} près un réel h tel que P(75 - h ≤ Z̄ ≤ 75 + h) ≈ 0,95, sachant que sous H_0 la moyenne d'échantillon Z̄ suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11.

Sous H_0, $\bar{Z}$ suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs est délimité par 1,96 écarts types autour de l'espérance. On obtient $h = 1,96 \times 0,11 = 0,2156$, soit 0,22 cL au centième près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.

On compare la moyenne observée à l'intervalle de décision centré en 75 cL, avec $h \approx 0,22$ cL.

- Si $\bar{x} \in [74,78\,;\,75,22]$, on accepte H_0.
- Si $\bar{x}$ est hors de cet intervalle, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Accepter H_0 si $\bar{x} \in [74,78\,;\,75,22]$ cL ; sinon, la rejeter.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon, indiquer si l'hypothèse H_0 : m = 75 peut être acceptée selon le test.

La moyenne observée dans l'échantillon est 74,73 cL. La borne basse de l'intervalle d'acceptation est 74,78 cL. Comme $74,73 < 74,78$, la moyenne observée n'appartient pas à cet intervalle. Le test conduit donc à rejeter l'hypothèse H_0 selon laquelle le volume moyen vaut 75 cL.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : H_0 est rejetée, car $74,73 < 74,78$ cL.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 2. Les deux exercices étudient la diffusion d'un implant médical et une machine à embouteiller. Les compétences évaluées portent sur l'ajustement, les équations différentielles, les probabilités, les lois usuelles et un test statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Avec y = ln(N - 30), un ajustement y = ak + b conduit à N = 30 + e^(ak+b).
- Les solutions de y' + ay = c s'obtiennent en ajoutant une solution constante c/a à la solution générale de l'équation homogène.
- Pour n essais indépendants de probabilité p, le nombre de succès suit B(n,p) ; l'approximation de Poisson utilise λ = np.
- Un test bilatéral à 95 % utilise un intervalle central contenant 95 % des valeurs attendues sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : le nombre de personnes équipées est exprimé en milliers et le temps est compté depuis 2013.
- Distinguer la loi binomiale exacte du nombre de pannes et son approximation par une loi de Poisson.
- Une probabilité faible représentée par une barre presque invisible n'est pas nécessairement nulle.
- Pour le test, comparer la moyenne observée aux bornes calculées et formuler la décision par rapport à H_0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer de la droite ajustée au modèle exponentiel du nombre d'implants ?

Le changement de variable donne y = ln(N - 30). Si l'ajustement est y = ak + b, alors N - 30 = e^(ak+b), donc N = 30 + e^(ak+b).

Q : Pourquoi le nombre de pannes est-il approché par une loi de Poisson de paramètre 5 ?

Le nombre de pannes suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,025. Son approximation de Poisson utilise le paramètre λ = np, soit 200 × 0,025 = 5.

Q : Comment organiser les deux heures et interpréter le coefficient de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Le coefficient dépend de la spécialité de BTS : il est indiqué sur la couverture. Répartissez le temps selon les questions et gardez quelques minutes pour vérifier calculs et unités.

Q : Comment conclure le test de réglage de la machine à embouteiller ?

Déterminez l'intervalle centré sur 75 qui contient 95 % des moyennes sous H_0, puis comparez-y la moyenne observée. Si elle est dans l'intervalle, H_0 n'est pas rejetée au seuil de 5 %.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Processus de Réalisation de Produits : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.