Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse de freinage d'un chariot** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse de freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction définie sur [0 ; +∞[. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction vitesse, le calcul d'une distance parcourue et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0, en utilisant la formule fournie.

L'équation est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. D'après la formule fournie, toute solution sur $[0; +\infty[$ s'écrit avec une constante réelle k. On obtient donc directement l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant y par g dans le membre de gauche de (E), on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vraie pour tout t, g vérifie bien l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). La différence entre toute solution de (E) et cette solution particulière vérifie l'équation homogène (E_0), dont les solutions sont $ke^{-0,8t}$. Il suffit donc d'ajouter ces solutions à g.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale de (E) est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À $t = 0$, on a $e^0 = 1$, donc la condition initiale donne $5 + k = 20$. Ainsi, $k = 15$. En reportant cette valeur dans la solution générale, on obtient la fonction vitesse recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. À partir de l'expression f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Quand $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Dans l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend ainsi vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5. La limite de la somme est donc 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

Une fonction qui tend vers une limite finie lorsque $t \to +\infty$ possède une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. Comme $f(t) \to 5$, la courbe C se rapproche de la droite horizontale d'ordonnée 5 lorsque t augmente sans borne.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = -12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle : f est strictement décroissante. Elle vaut 20 en $t = 0$ et tend vers 5 quand $t \to +\infty$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$, car l'exponentielle est positive. La vitesse décroît et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, mais elle ne s'annule jamais : le freinage ne permet donc pas l'arrêt dans ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans atteindre zéro.

Question 4.a. Pour F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée donne $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. À l'aide de la relation intégrale donnée pour la distance, calculer la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, donner sa valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive donnée, $d = F(1) - F(0)$. On obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 5 + 18,75(1 - e^{-0,8})$. L'évaluation numérique, arrondie au centième de mètre comme demandé, donne la distance parcourue.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 5 + 18,75(1 - e^{-0,8}) \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les choix du sujet, il faut retenir celui qui conserve les trois termes et présente ce reste.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On lit $f(0) = 20$. À partir de la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient la droite recherchée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique

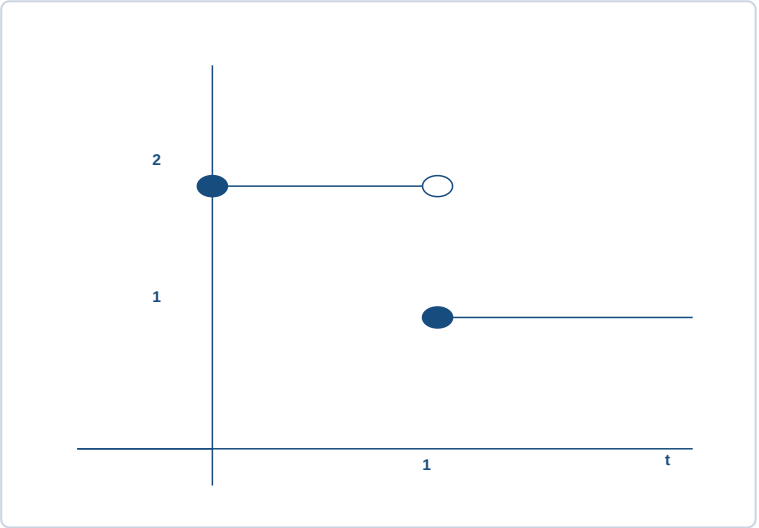
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice étudie les transformées de Laplace de l'entrée et de la sortie, puis demande de représenter les signaux et d'analyser le comportement de la sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme *e(t)=2U(t)-U(t-1)*, le signal est nul avant 0. À *t=0*, il prend la valeur 2. À *t=1*, le second échelon s'active et la valeur devient 1. Les points aux instants de saut sont pleins ou ouverts selon que l'instant appartient ou non à l'intervalle considéré.

Signal d'entrée e(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

e(t)=0 si *t<0*, *e(t)=2* si *0≤t<1*, et *e(t)=1* si *t≥1*.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e.

Par linéarité, la transformée de *2U(t)* vaut *2/p*. Le formulaire donne pour l'échelon retardé *U(t-1)* la transformée e^{-p}/p. En soustrayant ces deux termes, on obtient la transformée du signal d'entrée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$E(p) = \frac{2-e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^{-p}.

La fonction de transfert vérifie *S(p)=H(p)E(p)*, avec *H(p)=1/(p+1)*. En remplaçant *E(p)* par son expression, puis en distribuant le facteur *1/(p+1)*, on obtient les deux termes demandés. Le facteur e^{-p} reste attaché au terme retardé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, *p(p+1)*. Le numérateur obtenu est *(p+1)-p=1*. On retrouve donc le membre de gauche, pour toute valeur de *p* où les expressions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^{-p}/p et de e^{-p}/(p + 1), en utilisant le formulaire fourni.

Le formulaire donne les inverses de *1/p* et de *1/(p+1)*. Il indique aussi que multiplier une transformée par e^{-p} retarde le signal d'une unité : on remplace alors *t* par *t-1* et on multiplie par *U(t-1)*. Cela fournit les deux autres inverses.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition précédente donne *S(p)=2(1/p−1/(p+1))−e^{-p}(1/p−1/(p+1))*. Les termes contenant e^{-p} correspondent à des signaux retardés, nuls pour *0≤t<1*. Il reste donc l'inverse de *2(1/p−1/(p+1))*.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), puis donner sa valeur exacte et une valeur approchée au dixième.**

On évalue l'expression donnée en *t=1* : *s(1)=(e-2)e^{-1}+1*. Comme *(e-2)/e=1-2/e*, cela se simplifie en *2-2/e*. Sa valeur décimale est environ *1,264*, soit *1,3* au dixième.

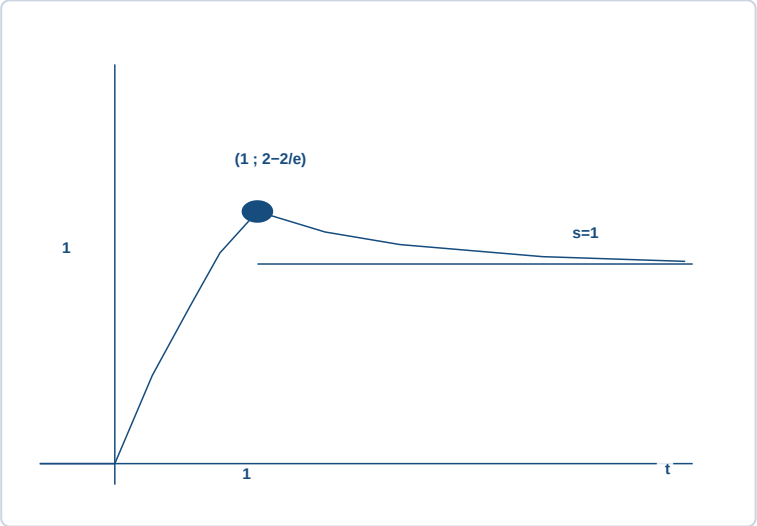
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Pour *t<0*, la sortie est nulle. Sur *[0;1[*, la courbe suit *2(1-e^{-t})* et atteint *2-2/e* en *t=1*. Pour *t≥1*, elle suit l'expression fournie, décroît et tend vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur au raccordement : la courbe est continue en *t=1*.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe part de $(0;0)$, atteint $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s=1$.

Question 5.c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour *t≥1*, on a *s(t)=1+(e-2)e^{-t}*. Lorsque *t* tend vers +∞, le terme exponentiel tend vers zéro. La limite est donc le terme constant, également valeur de l'asymptote horizontale.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, est identifiée par le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Le sujet étudie le freinage d'un chariot de fête foraine et la réponse d'un système électrique. Il évalue équations différentielles, étude de fonctions, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Une limite finie L de f(t) quand t tend vers +∞ donne à la courbe une asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle $[t_0 ; t_1]$.
- Le décalage f(t - a)U(t - a) se traduit par une multiplication de sa transformée de Laplace par e^{-ap}.

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir trouvé la famille de solutions de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale pour déterminer f.
- Justifier les variations à partir du signe de la dérivée et interpréter la limite de la vitesse dans le contexte.
- Pour calculer une distance, évaluer $F(t_1) - F(t_0)$ et respecter l'unité ainsi que l'arrondi demandé.
- Pour Laplace, appliquer correctement le facteur de retard et représenter les signaux en tenant compte de leur causalité et du changement à t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver les solutions de l'équation différentielle du premier exercice ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière constante de l'équation avec second membre. Appliquez enfin la condition initiale pour déterminer la constante de la solution recherchée.

Q : Comment interpréter la limite de la vitesse du chariot ?

Une limite égale à une constante positive signifie que la vitesse se rapproche de cette valeur sans tendre vers zéro. Pour conclure sur l'arrêt, examinez donc si la vitesse atteint zéro ou si sa limite est nulle.

Q : Quelle méthode utiliser pour relier l'entrée et la sortie avec Laplace ?

Transformez d'abord le signal d'entrée avec les règles du formulaire, puis multipliez sa transformée par la fonction de transfert H(p). Décomposez les fractions et utilisez les règles de retard pour revenir au signal temporel.

Q : Quels critères de présentation et de notation faut-il surveiller dans ce sujet ?

Donnez la valeur exacte puis l'approximation à la précision demandée, au centimètre ou au dixième selon la question. Les tracés doivent respecter les intervalles et les raccordements. Pour le QCM, une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Processus de Réalisation de Produits : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.