Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Épreuve de mathématiques, groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités, durée de vie de tubes fluorescents et contrôle de conformité (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est étudiée en fonction du temps. Les trois parties portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction et de la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 en utilisant la formule fournie.

La formule donnée s'applique à l'équation homogène $y' + ay = 0$. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. On remplace donc a dans la forme générale $y(t) = ke^{-at}$. La constante k peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur l'intervalle considéré, les solutions sont $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t)=5$ a pour dérivée $g'(t)=0$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t)+0,8g(t)=0+0,8\times5=4$. Cette égalité est vraie pour tout t de l'intervalle considéré, donc g est bien une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t)=5$ vérifie bien l'équation différentielle $y'+0,8y=4$.

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution de l'équation complète s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée. La partie homogène vaut $ke^{-0,8t}$, et la solution particulière vérifiée à la question précédente vaut 5. Leur somme donne donc toutes les solutions de l'équation différentielle proposée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'ensemble des solutions est $y(t)=ke^{-0,8t}+5$, où k est un réel quelconque.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

On reprend la solution générale $f(t)=ke^{-0,8t}+5$ et on impose la condition initiale de l'énoncé. À $t=0$, l'exponentielle vaut $e^{0}=1$, donc $f(0)=k+5=20$. Il en résulte $k=20-5=15$, ce qui fixe entièrement la fonction recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La solution vérifiant $f(0)=20$ est $f(t)=15e^{-0,8t}+5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

La fonction étudiée est $f(t)=15e^{-0,8t}+5$. Lorsque t tend vers +∞, l'exposant $-0,8t$ tend vers −∞. L'exponentielle tend alors vers zéro, et le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers zéro. Il ne reste que le terme constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale lorsque la fonction possède une limite finie en +∞. La limite obtenue à la question précédente vaut 5. L'équation de cette droite horizontale est donc donnée par l'ordonnée égale à cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale à la courbe C a pour équation $y=5$.

Question 2. À partir de l'expression fournie de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t}>0$. Ainsi, l'expression admise dans l'énoncé donne $f'(t)=-12e^{-0,8t}<0$: la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0)=20$ et sa limite en +∞ vaut 5.

t	0	+∞
$f'(t)$	−	
$f(t)$	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse devrait atteindre zéro à un instant fini. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse tend vers 5 m/s, sans atteindre zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse reste supérieure à 5 m/s et tend vers 5 m/s.

Question 4. a. Vérifier que la fonction F définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation d'une exponentielle composée, le premier terme a pour dérivée $-18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$. Le second a pour dérivée 5. Leur somme est bien $f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance sur l'intervalle de temps demandé est l'intégrale de la vitesse, donc $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. La différence donne la valeur exacte, puis l'arrondi au centimètre s'exprime avec deux décimales en mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m, au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier une seule réponse, sans justification.

Réponse à recopier, sans justification : la proposition qui contient le terme de reste $t^2\varepsilon(t)$ et précise que $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro s'écrit $y=f(0)+f'(0)t$. D'après l'énoncé, $f(0)=20$. La dérivée admise en partie B donne $f'(0)=-12e^{0}=-12$. On remplace ces deux valeurs dans la formule de la tangente.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'équation de la tangente à C au point d'abscisse zéro est $y=20-12t$.

2. Probabilités, durée de vie de tubes fluorescents et contrôle de conformité

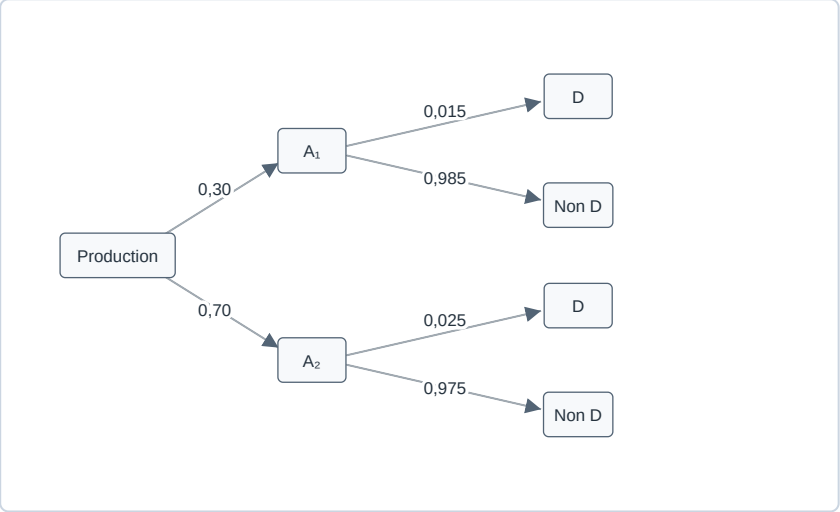
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers et vérifie leur conformité par des tests de détection des défauts. L'exercice étudie aussi la durée de fonctionnement des tubes selon une loi exponentielle et estime la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Représenter la situation par un arbre pondéré, en utilisant les proportions de production des deux ateliers et les probabilités conditionnelles de défaut.

On sépare d'abord la production entre les deux ateliers, puis chaque atelier entre tubes avec défaut et sans défaut. Les probabilités des deux branches issues de chaque atelier sont complémentaires.

Ateliers et défauts



A_1 : atelier 1 ; A_2 : atelier 2 ; D : le tube présente un défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré ci-dessous.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

La probabilité du chemin « atelier 1 puis défaut » est le produit de la proportion produite par l'atelier 1 et de sa probabilité conditionnelle de défaut : $P(A_1 \cap D) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit $0{,}45\,\%$.

Question 3. Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut, à partir des données sur les deux ateliers.

Un tube défectueux provient soit de l'atelier 1, soit de l'atelier 2. On additionne donc les probabilités des deux chemins menant à un défaut : $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit $2{,}2\,\%$.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut est $0{,}70 \times (1 - 0{,}025) = 0{,}6825$. La probabilité d'absence de défaut est $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit environ $69{,}8\,\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. Déterminer l'espérance de la durée de bon fonctionnement d'un tube et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0001$, l'espérance vaut $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 10\,000$ heures. C'est la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes, et non une durée garantie pour chacun d'eux.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Durée moyenne : $10\,000$ heures.

Question 2. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube soit inférieure à 8 000 heures.

La formule de la loi exponentielle donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme la durée suit une loi continue, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} \approx 0{,}5507$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 10^{-2} près : $P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser 10 000 heures est la probabilité complémentaire de $P(T \leq 10\,000)$. Ainsi, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}3679$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 10^{-2} près : $P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir des 975 rivets conformes observés parmi les 1 000 rivets de l'échantillon, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle est la fréquence des rivets conformes observée dans l'échantillon : $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle : $0{,}975$, soit $97{,}5\,\%$.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion de rivets conformes au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes au millième.

Avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$, la marge donnée par la formule est $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}} \approx 0{,}009677$. Les bornes sont f moins et plus cette marge, puis sont arrondies au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux où il est 3. Les deux exercices, notés chacun sur 10, étudient le freinage d'un chariot et la production industrielle. Ils évaluent équations différentielles, fonctions, probabilités conditionnelles, loi exponentielle et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- Si lim f(t) = L lorsque t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'estimation d'une proportion est la fréquence observée ; l'intervalle fourni est f ± 1,96√(f(1-f)/n).

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle, distinguer la solution homogène de la solution particulière constante.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, tenir compte de la vitesse limite et vérifier si elle atteint zéro.
- En probabilité conditionnelle, identifier l'événement conditionnant et utiliser la probabilité correspondante au dénominateur.
- Respecter les unités et les arrondis demandés : probabilités au centième et bornes de l'intervalle au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la vitesse ?

La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Si F est une primitive de f, alors d = $F(t_1) - F(t_0)$. Ici, la vitesse est en mètres par seconde et le temps en secondes.

Q : Quelle formule utiliser pour les probabilités d'une durée de vie exponentielle ?

Pour une durée T de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt). Pour une durée supérieure à t, utilisez le complément P(T > t) = e^(-λt). L'espérance vaut 1/λ et s'exprime dans la même unité que T.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices en fonction de leur difficulté, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Quel coefficient s'applique à cette épreuve de mathématiques ?

Le tableau de la première page indique un coefficient 2 pour les spécialités listées, sauf Traitement des matériaux, pour lequel le coefficient est 3. Le coefficient applicable dépend donc de la spécialité du candidat.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscprp.fr/assets/annales/bts-cprp/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPRP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception des Processus de Réalisation de Produits : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.